21. Kombinatorika a její užití, řešení rovnic s kombinačními čísly, binomická věta

Co je kombinatorika? Která hlediska uplatňujeme při tvorbě skupin ? Charakterizujte variace, permutace a kombinace a uveďte vzorce pro jejich výpočet. Definujte n!

Kombinatorika – variace, permutace, kombinace a jejich užití

Kombinatorika se zabývá tvořením skupin po k-prvcích z množiny, která obsahuje n – prvků podle dalších hledisek :

a) **na pořadí prvků** záleží – **skupiny se nazývají** variace **– označujeme** $V_k(n)$ **– čti variace k – té třídy vytvořené z množiny, která obsahuje n – prvků nebo** permutace –**označujeme** $P(n)$ **- čti permutace z n – prvků**

nezáleží- **skupiny se nazývají** kombinace **– označujeme** $C_k(n)$ **– čti kombinace k-té třídy vytvoření z množiny, která obsahuje n-prvků**

b) **prvky se ve skupině –** vyskytují nejvýš jednou – **viz označení výše uvedených skupin** $V_k(n)$, $P(n)$, $C_k(n)$

mohou se opakovat – **variace s opakováním prvků označujeme** $V'_k(n)$ **, kombinace s opakováním prvků** $C'_k(n)$

V kombinatorice zavádíme výraz n ! – čti n faktoriál a vypočteme
n ! = n . (n-1) . (n-2) . (n-3) 3.2.1
na příklad : 5! = 5.4.3.2.1 = 720 , 10! = 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 3628800

$$\frac{8!}{3!} = \frac{8.7.6.5.4.3!}{3!} = 8.7.6.5.4 = 6720$$

Příklady - VARIACE

1) **Na hokejovém mistrovství hraje ve finále 6 mužstev. Určete počet způsobů, jimiž se zúčastněná družstva mohou rozdělit o zlatou, stříbrnou a bronzovou medaili.**

Řešení : záleží na pořadí prvků – druhu medaile – jde o variace třetí třídy k=3(3 druhy medailí ze šesti prvků – n = 6 (6 družstev)
$V_3(6)$ = 6 . 5 .4 = 120 možností

2) **Výbor tělovýchovné jednoty tvoří 8 lidí. Určete. kolika způsoby lze z nich vybrat předsedu, místopředsedu , jednatele a hospodáře .**
Řešení : záleží na pořadí prvků .... jde o variace 4-té třídy – k =4 (počet funkcí) – n = 8 .. počet členů výboru
$V_4(8)$ = 8 . 7 . 6 . 5 = 1680 možností

3) **Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu jsou každé dvě cifry různé .**
Řešení : Každé čtyřciferné číslo lze považovat za čtveřici sestavenou z cifer 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 ....jde o $V_4(10)$ = 10 . 9 .8 . 7 = 5040 čísel
Z tohoto počtu musíme odečíst všechny variace s nulou na prvním místě ,
t.j. $V_3(9)$= 9 . 8 . 7 = 504
Čtyřciferných čísel požadované vlastnosti je celkem 5040 – 504 = 4536

4) **Určete počet všech trojciferných čísel menších než 500, v jejichž zápisu jsou pouze cifry 3, 4, 5 ,6, 7 a to každá nejvýš jednou .**

Řešení : Trojciferná čísla menší než 500 mohou sestavená z daných číslic mohou začínat pouze cifrou 3 nebo 4 , t.j. na dalších místech jsou pouze 2 cifry,t.j. jedná se o variace druhé třídy sestavené ze zbývajících prvků , t.j. pro čísla začínající cifrou 3 ...V_2(4) = 4.3 = 12 a stejný počet je pro čísla začínající cifrou 4 .... V_2 (4) = 12 , t.j. celkem 2 . 12 = 24

<u>Cvičení :</u>

1) Výbor tělovýchovné jednoty tvoří 10 lidí. Určete, kolika způsoby lze z nich vybrat předsedu, místopředsedu, jednatele a hospodáře ? (5040)

2)Na hokejovém mistrovství hraje ve finále osm mužstev. Určete počet způsobů, jimiž se zúčastněná družstva mohou rozdělit o zlatou, stříbrnou a bronzovou medaili . (336)

3) Kolik čtyřciferných čísel lze sestavit z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 , jestliže se žádná číslice nemá opakovat ? (720)

4) Kolik trojciferných čísel větších než 400 lze vytvořit z číslic 1, 3, 5, 7, 9 , jestliže se žádná číslice nemá opakovat ? (36)

5) Kolik čtyřciferných čísel menších než 5000 lze vytvořit z cifer 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, jestliže se žádná číslice nemá opakovat ? (480)

6)K sestavení vlajky skládající se ze tří různobarevných vodorovných pruhů jsou k dispozici látky těchto barev : červená, žlutá, modrá , zelená a bílá. Určete, kolik vlajek lze z těchto látek sestavit ? (60)

PERMUTACE

Permutace vzniknou záměnou pořadí prvků

P (n) = n !

Příklad :

l) **Na poličku chceme postavit do řady vedle sebe 15 knih. Kolika způsoby je můžeme seřadit?**
   P (15) = 15 ! = 1307674368000
2) **Určete počet trojciferných čísel, které můžeme sestavit z číslic 3,5,7 , jestliže se číslice nemají opakovat !**
   P (3) = 3! = 3.2.1 = 6

<u>Cvičení :</u>

1) Určete počet všech pěticiferných čísel , které lze sestavit z lichých číslic desítkové soustav, jestliže se číslice nemají opakovat . (120)

2) Kolika způsoby lze rozmíchat 32 karet ? (2,631308369 . 10^{35})

Variace s opakováním prvků V_k (n) = n^k

Příklad :

1) **Určete počet všech trojciferných přirozených čísel sestavených pouze z cifer 1,2,3,4,5.**

Řešení : jedná se o počet všech variací třetí třídy (trojciferná čísla) s opakováním (není tam omezení, že každá číslice se vyskytuje pouze jednou) z pěti prvků (počet daných číslic)

$V_3'(5) = 5^3 = 125$

2) **Tipujete výsledky 13 zápasů – zda vyhrají domácí, hosté či skončí nerozhodně . Určete, kolik je všech možných tipů.**

Řešení : n= 3 .....(0,1,2) , k= 13 zápasů .... jedná se o $V_{13}(3) = 3^{13}$ = 1594423

3) **Určete, kolik značek Morseovy abecedy lze vytvořit pomocí nejvýše čtyřprvkových skupin složených z teček a čárek .**

Řešení : jedná se o součet variací s opakováním ze dvou prvků a to :

$V_1 (2) + V_2 (2) + V_3 (2) + V_4 (2) = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2+4+8+16=30$

4¨) Kolik dvojciferných čísel lze utvořit z číslic 1,2,3,4 ?

Řešení : jedná se o variace druhé třídy s opakováním prvků utvořené ze čtyř prvků

$V_2 (4) = 4^2 = 16$

Kombinace k-té třídy z n-prvků

je každá k- prvková podmnožina množiny určené těmito prvky $C_k(n) = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$

Příklady :

1) Ve třídě je 30 žáků , z nichž je třeba vybrat trojici žáků na literární soutěž .Kolika způsoby je možno tuto trojici vybrat ?

Řešení : Jedná se o kombinace 3.třídy (trojice) ze 30 prvků, t.j.C $C_3(30) = \binom{30}{3} = \frac{30!}{3!27!} = 4060$

<u>Cvičení :</u>

1) Basketbalové družstvo tvoří pět hráčů. Určete, kolik možností má trenér pro sestavení družstva,má-li k dispozici 12 hráčů? ($C_5(12)= 792$)
2) Určete, kolik kružnic je určeno deseti body, jestliže zádné tři neleží na jedné přímce a žádné čtyři na jedné kružnici ? ($C_2(10)= 120$)
3) Kolika způsoby je možno vybrat tříčlenné hlídky z pěti vojáků? ($C_3(5)=10$)
4) Kolika způsoby můžeme z 15 ti žáků vybrat šestičlennou delegaci ? ($C_6(15)= 5005$)
5) Kolik kružnic je určeno patnácti body, jestliže sedm bodů leží na jedné kružnici a ostatní jsou obecně položené ? ($C_3(15) – C_3(7) + l = 421$)
6) Kolik přímek je určeno 11 body, jestliže pět bodů leží na jedné přímce a žádné další na jedné přímce neleží ? ($C_2(11) – C_2 (5) + 1 = 46$
7) Ve třídě je 19 chlapců a 11 dívek. Kolika způsoby lze z nich vybrat tříčlennou skupinu, v níž jsou a) pouze chlapci , b) pouze dívky , c) dva chlapci a jedna dívka
   (a) $C_3(19) =969$ b) $C_3(11) = 165$ c) $C_2(19) . C_1(11) = 1881$)
8) Hokejové mužstvo má 20 hráčů a to 13 útočníků, 5 obránců a 2 brankáře. Kolik různých Kolik různých sestav by mohl trenér vytvořit,jestliže sestava má mít 3 útočníky, 2 obránce a 1 brankáře ? ($C_3(13) . C_2 (5) . C_1 (2) = 5720$)
9) Kolik je možných tipů ve Sportce (tipujeme –li šest čísel ze 49) ? ($C_6(49) = 13983816$)
10) Kolik je možných tipů ve Sportce, tipujeme-li jako jedno z čísel číslo 8 ?

<u>**Kombinatorika - souhrnná cvičení:**</u>

1) Na hokejovém mistrovství hraje ve finále osm mužstev. Určete počet způsobů, jimiž se zúčastněná družstva mohou rozdělit o zlatou, stříbrnou a bronzovou medaili ? (336)
2) Výbor tělovýchovné jednoty tvoří 10 lidí. Určete, kolika způsoby lze z nich vybrat předsedu, místopředsedu, jednatele a hospodáře? (5040)
3) Určete počet všech čtyřciferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu jsou
   a) každé dvě číslice různé (4 536)
   b) číslice se mohou opakovat (9 000)
4) Kolik čtyřciferných čísel menších než 4000 lze sestavit z číslic 1,2,3,4,5,6,7,8 ? (Uvažujte obě možnosti) (630 nebo 1536)
5) Kolik trojciferných čísel větších než 300 lze sestavit z číslic 1,2,3,4,5,6,7 ? (Uvažujte obě možnosti) (150 nebo 245)
6) V rovině je dáno 10 bodů, z nichž šest leží na jedné kružnici. Kolik kružnic je jimi určeno? (101)
7) Je dáno 12 bodů v prostoru, z nichž 4 leží v jedné rovině. Kolik rovin je jimi určeno ? (217)
8) Kolik přímek je určeno jedenácti body , jestliže sedm bodů leží v jedné přímce ? (35)
9) Ve třídě je 29 žáků, z toho 11 dívek. Kolika způsoby lze vytvořit pětičlennou delegaci, ve mají být 3 chlapci a 2 dívky ? (44880)
10) Vyučující matematiky má připraveno 17 příkladů z aritmetiky a 15 příkladů z geometrie. Kolika způsoby může sestavit písemnou práci, ve které mají být 5 příkladů a to 3 z aritmetiky a dva z geometrie ? (71400)
11) Hokejové družstvo má 20 hráčů a to 12 útočníků, 6 obránců a 2 brankáře. Kolik různých sestav by mohl trenér vytvořit, jestliže sestava má mít 3 útočníky, 2 obránce a 1brankáře ? (6 600)
12) Kolik hráčů se zúčastnilo šachového turnaje, když bylo odehráno 28 partií a hráči hráli každý s každým? (8)
13) Kolik družstev se zúčastnilo volejbalového turnaje, jestliže každé družstvo hrálo každý s každým a Celkem bylo sehráno 15 utkání ? (6)

Rovnice s kombinačními čísly.
Řešte rovnice:
Příklad:
Řešte v N:

$$\binom{x-2}{x-4}+\binom{x-3}{x-5}=16$$

$$\frac{(x-2)!}{2!(x-4)!}+\frac{(x-3)!}{2!(x-5)!}=16$$

$$\frac{(x-2)(x-3)(x-4)!}{2(x-4)!}+\frac{(x-3)(x-4)(x-5)!}{2(x-5)!}=16$$

Po krácení zlomku a úpravě dostaneme kvadratickou rovnici $x^2 - 6x - 7 = 0$ s kořeny $x_1 = 7$, $x_2 = -1$. Protože výraz n! je definován pouze pro celá nezáporná čísla, vyhovuje $x \geq 5$, t.j kořen x=7

1) $\binom{x}{2}+\binom{x-1}{2}=4$ (x=3) 2) $\binom{x-1}{x-3}+\binom{x}{x-1}=7$ (x = 4)

3) $\binom{n-1}{n-3}-n=8$ (n=8) 4) $\binom{x}{2}+\binom{x-1}{x-3}=\binom{6}{4}+\binom{4}{0}$ (x = 5)

Proveďte rozvoj mocniny :
Příklad:
Proveďte rozvoj mocniny

$$\left(x^2-\frac{1}{x^3}\right)^5=\binom{5}{0}(x^2)^5\left(-\frac{1}{x^3}\right)^0+\binom{5}{1}(x^2)^4\left(-\frac{1}{x^3}\right)^1+\binom{5}{2}(x^2)^3\left(-\frac{1}{x^3}\right)^2+\binom{5}{3}(x^2)^2\left(-\frac{1}{x^3}\right)^3+$$

$$+\binom{5}{4}(x^2)^1\left(-\frac{1}{x^3}\right)^4+\binom{5}{5}(x^2)^0\left(-\frac{1}{x^3}\right)^5=$$

$$= x^{10}-5x^8\left(\frac{1}{x^3}\right)+10\frac{x^6}{x^6}-10\frac{x^4}{x^9}+5\frac{x^2}{x^{12}}-\frac{1}{x^{15}}=$$

$$= x^{10}-5x^5+10-\frac{10}{x^5}+\frac{5}{x^{10}}-\frac{1}{x^{15}}$$

1) $(x+2)^5=$ 2) $(1-m)^7=$ 3) $(2a^3-1)^4=$

4) $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6=$ 5) $\left(2x^3-\frac{1}{x^4}\right)^5=$ 6) $(a^2+b^3)^7=$

Určete n-tý člen rozvoje výrazu:

1) pátý $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{y^2}\right)^8$ 2) sedmý $\left(a^2-\frac{1}{a^3}\right)^{10}$ 3) jedenáctý $(x-y)^{15}$

1)Řešení: $\binom{8}{4}\left(\frac{x^2}{2}\right)^4\left(-\frac{2}{y^2}\right)^4=\frac{8!}{4!4!}.\frac{x^8}{16}.\frac{16}{y^8}=70\frac{x^8}{y^8}$ 2) $\binom{10}{6}(a^2)^6\left(-\frac{1}{a^3}\right)^4=210$

3) $\binom{15}{10}(x)^{10}(-y)^5=-3003x^{10}y^5$